고무줄로 별을 만들기

김민찬 김태성 윤지용 류승정

송도고등학교 · 2026 수학 주제 탐구



탐구 동기

고무줄을 이용해 손가락으로 별을 만드는 영상을 보고, 영상 속 방식이 실제로 별을 만드는 가장 빠른 방법인지 의문이 생겼다. 이에 한 손가락의 움직임을 한 번의 동작으로 정하고, 오각별, 칠각별 등을 만드는 최단 방법을 수학적으로 구해 보고자 하였다.

핵심 질문

손가락 동작과 고무줄 상태를 수학적으로 모델링하여, 별을 만드는 최단 동작 횟수와 최단 경로를 구할 수 있는가?

탐구 방법

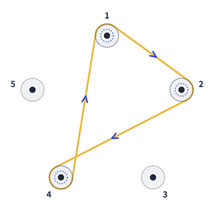
1. 별의 형태와 완성 조건을 정의한다.
2. 손가락 움직임과 고무줄 상태를 기호화한다.
3. 별을 만드는 데 필요한 최소 동작 횟수와 방법을 찾는다.

고무줄 모델

고무줄이 손가락에 걸려있는 상태를 다음과 같이 나타낸다.

1. 단어

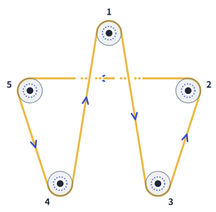
- i 번째 손가락에 시계방향으로 걸려있으면 x_i
- 반시계방향으로 걸려있으면 x_i^{-1} 로 표시한다.



$$w = x_1 x_2 x_4^{-1}$$

2. 교차 정보

- 어떤 모서리가 위에 오는지 표시하는 교차 정보 H 가 필요하다.
- 단어에서 먼저 오는 모서리가 위에 있으면 1, 아래에 있으면 0 으로 표시한다.



$$w = x_1 x_3^{-1} x_2^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1}, \quad H = (1, 0)$$

(1 번 교차점에서 선행 모서리 $x_1 x_3^{-1}$ 가 위, 2 번 교차점에서 선행 모서리 $x_2^{-1} x_5^{-1}$ 가 아래)

고무줄의 움직임

손가락 움직임 규칙

1. 한 번 움직일 때는 손가락 하나만 사용한다.
2. 선택한 가닥 하나를 손가락에 걸어 아래에서 위로 올린다.
3. 가닥을 반 바퀴 돌리거나 두 가닥을 동시에 움직이는 것은 허용하지 않는다.
4. **교차 정보 H 갱신 규칙**
   - 기존 선분을 변형한 경우: 기존 H 순서를 상속한다.
   - 완전히 새로 생긴 교차인 경우: 새 선분을 위로 둔다.
   - 한 바퀴 감기는 경로인 경우: 새 선분을 무조건 위로 두지 않는다.
   - H 가 서로 달라서 걸리는 삭제: 그 동작 자체를 허용하지 않는다.

손가락 움직임 모델링

위 규칙을 고무줄 모델에 적용하면 손가락에 거는 동작과 빼는 동작을 정의할 수 있다.

1) 손가락 걸기

$$\cdots x_a^{e_a} x_b^{e_b} \cdots \longrightarrow \cdots x_a^{e_a} x_i^{e(i;a,b)} x_b^{e_b} \cdots$$

$$e_n(i;a,b) = \begin{cases} +1, & 0 < d_n(a,i) < d_n(a,b), \\ -1, & 0 < d_n(a,b) < d_n(a,i). \end{cases}$$

2) 손가락 빼기

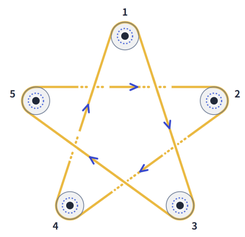
$$\cdots x_a^{e_a} x_i^{e_i} x_b^{e_b} \cdots \longrightarrow \cdots x_a^{e_a} x_b^{e_b} \cdots$$

3) 예시: $n = 5, a = 4, b = 2, i = 1 \implies e_5(1;4,2) = +1$

탐구 내용 ① 오각별

초기 삼각형 두 유형 비교

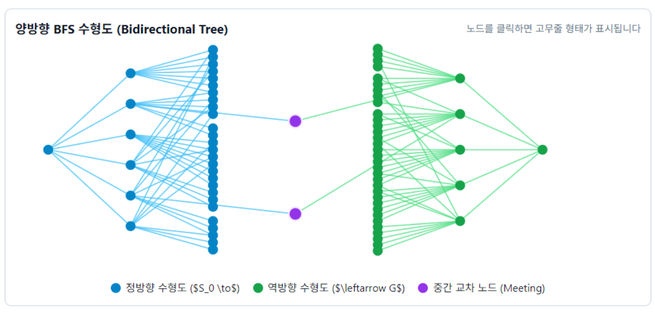
- **연속형** ($x_1 x_2 x_3$): 최소 6 회 동작
- **건너뜀형** ($x_1 x_2 x_4$): 최소 4 회 동작 → 초기 상태로 선택



오각별 다이어그램 ($G_5 = x_1 x_3 x_5 x_2 x_4$, 목표: $1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 4 \to 1$)

최소 경로 탐색 및 양방향 BFS Tree

양방향 BFS 는 시작점과 도착점에서 동시에 너비 우선 탐색을 진행하여 두 탐색이 만나는 지점에서 최단 경로를 찾는 알고리즘이다.



탐구 내용 ① 오각별

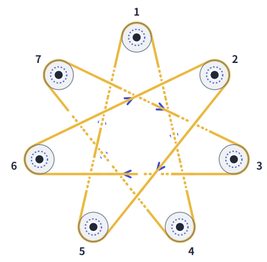
$x_1 x_2 x_4$ **에서 찾은 대표 4 회 경로**

1. **5 번 삽입:** $x_1 x_2 x_4 \longrightarrow x_1 x_5^{-1} x_2 x_4$
2. **3 번 삽입:** $x_1 x_5^{-1} x_2 x_4 \longrightarrow x_1 x_3 x_5^{-1} x_2 x_4$
3. **5 번 삭제:** $x_1 x_3 x_5^{-1} x_2 x_4 \longrightarrow x_1 x_3 x_2 x_4$
4. **5 번 재삽입:** $x_1 x_3 x_2 x_4 \longrightarrow x_1 x_3 x_5 x_2 x_4 = G_5$

$I - D = 2, \quad L = 2 + 2D \implies$ 최소 동작 수 4 회

탐구 내용 ② 칠각별

목표 칠각별 $\{7/3\}$: $G_7 = x_1 x_4 x_7 x_3 x_6 x_2 x_5$
$(1 \to 4 \to 7 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1)$



칠각별 다이어그램 (G_7, 꼭짓점 7 개, 교차점 14 개)

네 초기 상태의 BFS 탐색 결과

초기 연결 순서	최소 동작 수	탐색 상태 수
$x_1 x_2 x_7$	10 회	80,994 개
$x_1 x_3 x_7$	10 회	80,899 개
$x_1 x_4 x_7$	**8 회**	68,622 개
$x_1 x_3 x_5$	**8 회**	68,708 개

$I - D = 4, \quad L = 4 + 2D \implies$ 최소 동작 수 8 회

$x_2 x_3 x_6$ **에서 찾은 대표 8 회 경로**

1. $M(1;2,3) : x_1^{-1}$ 삽입
2. $M(4;1,2) : x_4$ 삽입
3. $D_1 : x_1$ 삭제
4. $M(7;4,3) : x_7$ 삽입
5. $M(1;2,4) : x_1^{-1}$ 삽입
6. $M(5;1,2) : x_5$ 삽입
7. $D_1 : x_1^{-1}$ 삭제
8. $M(1;5,4) : x_1$ 삽입

결과 및 결론

양방향 BFS 탐색 결과 비교

별	최단 동작 수	시작점 방문	목표점 방문	만남 상태	고유 확인 상태
오각별	$2 + 2 = \boxed{4}$ 회	36 개	41 개	2 개	75 개
칠각별	$4 + 4 = \boxed{8}$ 회	3,240 개	1,814 개	26 개	5,028 개

BFS 탐색을 통해 고무줄의 걸림 방향과 교차 위아래 상태를 반영한 상태 전이 모델의 최소 동작 수를 도출함.

향후 탐구 계획

- 교차 정보 H 갱신 단계별 비교 및 9 각별 이상으로 확장

참고문헌

1. Cormen, T. H. 외 (2022). *Introduction to Algorithms*, 4th ed. MIT Press.
2. Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th ed. McGraw-Hill.
3. Weisstein, E. W. “Star Polygon.” *MathWorld—A Wolfram Web Resource*.
4. Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory*. Springer.